

Analisis Kestabilan Titik Tetap dan Bifurkasi Kelompok Inti pada Model Transmisi Penyakit Seksual

Titi Rahmawati, M. Nur Aidi, Farida Hanum
Institut Pertanian Bogor
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jurusan Matematika
Jl. Raya Pajajaran Bogor, 16144 Indonesia

Abstrak

Transmisi penyakit seksual pada suatu populasi berkaitan erat dengan kegiatan seksual individu-individu pada populasi tersebut. Dalam pembahasan model transmisi penyakit seksual ini, populasi dibagi menjadi dua kelompok, yaitu kelompok dengan tingkat aktivitas seksual tinggi yang dinamakan kelompok inti, dan kelompok dengan tingkat aktivitas seksual rendah, yang dinamakan dengan kelompok non-inti. Berdasarkan tingkat aktivitas seksualnya, pada umumnya kelompok non inti tidak terlalu berpengaruh pada transmisi penyakit seksual ini. Jadi, model umum transmisi penyakit seksual amat dipengaruhi oleh model kelompok inti yang dibahas dalam tulisan ini. Analisis kestabilan dilakukan untuk model tersebut dan diperoleh tiga titik tetap beserta kondisi kestabilan yang harus dipenuhi.

Individu terinfeksi dapat menularkan penyakit pada individu rentan atau ter vaksinasi, dan dapat berpengaruh pada kestabilan transmisi penyakit seksual pada kelompok inti ini. Strategi pencegahan (vaksinasi) juga diberikan pada kelompok inti. Perubahan nilai tingkat vaksinasi dapat mempengaruhi kestabilan sistem. Sistem akan kehilangan kestabilan apabila diberikan tingkat vaksinasi yang lebih kecil daripada tingkat kritis vaksinasi.

1 Pendahuluan

Penyakit Menular secara Seksual (*Sexually Transmitted Diseases*) atau penyakit kelamin adalah penyakit yang penularannya terutama melalui hubungan seksual. Oleh karena itu transmisi penyakit seksual pada suatu populasi berkaitan erat dengan kegiatan seksual individu-individu yang berada pada populasi tersebut.

Dalam pembahasan transmisi penyakit seksual ini, populasi dibagi menjadi dua kelompok, yaitu kelompok dengan aktivitas seksual tinggi (dinamakan kelompok inti) dan kelompok dengan aktivitas seksual rendah (dinamakan kelompok non-inti). Karena tingkat aktivitas seksualnya tinggi maka tingkat transmisi penyakit

seksual pada kelompok inti pada umumnya tinggi. Strategi pencegahan (vaksinasi) pada umumnya juga ditujukan pada kelompok inti ini.

2 Model Umum Transmisi Penyakit Seksual

Misalkan banyaknya individu pada suatu populasi pada waktu t adalah $P = P(t)$, dan populasi dibagi menjadi dua kelompok, yaitu kelompok inti dengan banyaknya individu pada waktu t adalah $A = A(t)$, dan kelompok non-inti dengan banyaknya individu pada waktu t adalah $C = C(t)$. Kelompok inti dibagi menjadi beberapa subkelompok, yaitu subkelompok rentan (*susceptible* $[S]$), tervaksinasi (*vaccinated* $[V]$), dan terinfeksi (*infected* $[I]$), sehingga:

$$C = S + V + I.$$

Subkelompok rentan adalah subkelompok individu yang telah berhubungan seksual dengan individu yang sudah terinfeksi, subkelompok tervaksinasi adalah subkelompok individu rentan yang telah mendapatkan vaksinasi, sedangkan subkelompok terinfeksi adalah subkelompok individu rentan yang sudah terinfeksi dan dapat menularkannya pada individu lain melalui hubungan seksual.

Pada model transmisi penyakit seksual terdapat asumsi bahwa bagi individu yang terinfeksi diberikan pengobatan atau pemulihan. Setelah pengobatan atau pemulihan ini individu yang terinfeksi kembali ke subkelompok rentan pada tingkat $\alpha(1 - \gamma)$ atau ke subkelompok tervaksinasi pada tingkat $\alpha\gamma$. Haderler dan Castillo-Chavez (1995) menyusun suatu model transmisi penyakit seksual pada suatu populasi secara umum sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= b(P - I) + \tilde{b}I - \tau(I, C)A - \mu A, \\ \frac{dS}{dt} &= \tau(I, C)A - \frac{\beta SI}{C} - \psi S + \alpha(1 - \gamma)I - \mu S, \\ \frac{dV}{dt} &= \psi S - \frac{\tilde{\beta} VI}{C} + \alpha\gamma I - \mu V, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI + \tilde{\beta} VI}{C} - \alpha I - \tilde{\mu} I,\end{aligned}$$

dengan

b adalah tingkat kelahiran populasi yang tidak terinfeksi, dengan $b > 0$,

\tilde{b} adalah tingkat kelahiran populasi terinfeksi, dengan $0 \leq \tilde{b} \leq b$,

μ adalah tingkat kematian populasi yang tidak terinfeksi, dengan $\mu > 0$,

$\tilde{\mu}$ adalah tingkat kematian terinfeksi, dengan $\tilde{\mu} \leq \mu$,

α adalah tingkat pemulihan, dengan $\alpha > 0$,

Analisis Kestabilan Titik Tetap dan Bifurkasi Kelompok Inti pada Model Transmisi Penyakit Seksual

ψ adalah tingkat vaksinasi yaitu tingkat transisi langsung individu dari subkelompok rentan ke subkelompok terinfeksi, dengan $\psi \geq 0$,

β adalah tingkat transmisi penyakit seksual dari subkelompok terinfeksi ke subkelompok rentan, dengan $\beta > 0$,

$\tilde{\beta}$ adalah tingkat transmisi penyakit seksual dari subkelompok terinfeksi ke subkelompok terinfeksi, dengan $0 \leq \tilde{\beta} \leq \beta$,

γ adalah pembobot, dengan $0 \leq \gamma \leq 1$,

$r(I, C)$ adalah fungsi *recruitment* ke dalam kelompok inti.

Asumsi :

- $b = \tilde{b}$, $\mu = \tilde{\mu}$, $b = \mu$,
- Ukuran populasi konstan

Berdasarkan asumsi tersebut, maka model transmisi di atas menjadi:

$$\frac{dA}{dt} = \mu P - r(I, C)A - \mu A, \quad (1)$$

$$\frac{dS}{dt} = r(I, C)A - \frac{\beta SI}{C} - \psi S + \alpha(1 - \gamma)I - \mu S, \quad (2)$$

$$\frac{dV}{dt} = \psi S - \frac{\tilde{\beta} VI}{C} + \alpha\gamma I - \mu V, \quad (3)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI + \tilde{\beta} VI}{C} - \alpha I - \mu I. \quad (4)$$

3 Model Kelompok Inti pada Transmisi Penyakit Seksual

Dengan adanya asumsi bahwa kelompok non-inti tidak berperan secara langsung pada transmisi penyakit seksual, maka sistem persamaan (1) - (4) berhubungan erat dengan model transmisi penyakit seksual pada kelompok inti yang terisolasi dari kelompok non-inti. Dan dengan asumsi $r(I, C)A = \mu C$ dan kelompok inti berukuran konstan, yaitu $C(t) = C$, maka Haderler dan Castillo-Chavez (1995) menyusun model kelompok inti sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu C - \frac{\beta SI}{C} - \psi S + \alpha(1 - \gamma)I - \mu S, \quad (5)$$

$$\frac{dV}{dt} = \psi S - \frac{\tilde{\beta} VI}{C} + \alpha\gamma I - \mu V, \quad (6)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI + \tilde{\beta} VI}{C} - \alpha I - \mu I, \quad (7)$$

dan

$$S(t) + V(t) + I(t) = C(t).$$

Analisis Kestabilan Titik Tetap dan Bifurkasi Kelompok Inti pada Model Transmisi Penyakit Seksual

3.1 Bilangan Reproduksi

Bilangan reproduksi yang akan dibahas pada analisis kestabilan transmisi penyakit seksual pada model kelompok inti adalah sebagai berikut:

1. **bilangan reproduksi dasar (R_0)**, yaitu rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh satu individu yang sudah terinfeksi dan dinyatakan sebagai

$$R_0 = \frac{\beta}{\alpha + \mu}. \quad (8)$$

2. **bilangan reproduksi bagi suatu populasi yang tervaksinasi (\tilde{R}_0)**, yaitu rata-rata banyaknya individu tervaksinasi yang terinfeksi secara langsung oleh satu individu yang sudah terinfeksi dan dinyatakan sebagai

$$\tilde{R}_0 = \frac{\tilde{\beta}}{\alpha + \mu}. \quad (9)$$

3. **bilangan reproduksi dengan adanya strategi vaksinasi ($R(\psi)$)**, yaitu potensi untuk terinfeksi oleh individu yang terinfeksi kepada individu yang rentan atau tervaksinasi dalam suatu populasi dengan adanya strategi vaksinasi, dan dinyatakan sebagai:

$$R(\psi) = \frac{\mu}{\mu + \psi} R_0 + \frac{\psi}{\mu + \psi} \tilde{R}_0. \quad (10)$$

Kondisi yang akan timbul adalah satu di antara tiga kemungkinan ini:

1. jika $R(\psi) < 1$, maka penyakit akan menghilang,
2. jika $R(\psi) = 1$, maka penyakit akan menetap (endemis),
3. jika $R(\psi) > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.

(Giesecke 1994)

Pada tulisan ini akan dibahas pengaruh kondisi $R(\psi)$ terhadap sistem persamaan (5) - (7).

3.2 Penentuan Titik Tetap

Titik tetap sistem persamaan (5) - (7) dapat diperoleh dengan menentukan

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad \frac{dV}{dt} = 0, \quad \text{dan} \quad \frac{dI}{dt} = 0.$$

Dengan memilih S, V, I yang memenuhi ketiga persamaan tersebut diperoleh tiga titik tetap sebagai berikut:

Analisis Kestabilan Titik Tetap dan Bifurkasi Kelompok Inti pada Model Transmisi Penyakit Seksual

Persamaan (7) dan $\frac{dI}{dt} = 0$ menghasilkan

$$I_1 = 0, \quad \text{atau} \quad (11)$$

$$\frac{\beta S + \tilde{\beta} V}{C} - \alpha - \mu = 0. \quad (12)$$

1. Titik tetap $T_1 (S_1, V_1, I_1)$.

Dengan mensubstitusi persamaan (11) pada persamaan (5) dan (6) dan memberikan nilai sisi kanan sama dengan nol akan diperoleh

$$S_1 = \frac{\mu C}{\mu + \psi}, \quad \text{dan} \quad V_1 = \frac{\psi C}{\mu + \psi},$$

sehingga titik tetapnya adalah:

$$T_1 = \left(\frac{\mu C}{\mu + \psi}, \frac{\psi C}{\mu + \psi}, 0 \right).$$

2. Titik tetap $T_2 (S_2, V_2, I_2)$ dan $T_3 (S_3, V_3, I_3)$.

Dengan mensubstitusi $S + V + I = C$ pada persamaan (12) akan diperoleh

$$S^* = \frac{C(\alpha + \mu) - \tilde{\beta}(C - I)}{\beta - \tilde{\beta}}. \quad (13)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusi persamaan ini pada persamaan (5) dan memberikan nilai sisi kanan sama dengan nol akan diperoleh persamaan kuadrat dalam I :

$$aI^2 + bI + c = 0, \quad (14)$$

dengan

$$\begin{aligned} a &= \frac{\beta \tilde{\beta}}{C}, \\ b &= \mu(\beta + \tilde{\beta}) + \alpha\gamma\beta + \tilde{\beta}(\psi + \alpha(1 - \gamma) - \beta), \\ c &= C((\psi + \mu)(\alpha + \mu - \tilde{\beta}) - \mu(\beta - \tilde{\beta})). \end{aligned}$$

Akar persamaan (14) adalah

$$I^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (15)$$

Dari asumsi bahwa $I^* \geq 0$ dan bernilai real maka haruslah:

$$b^2 - 4ac \geq 0, \quad \text{dan} \quad -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \geq 0 \quad (16)$$

Jadi diperoleh

$$I_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (17)$$

$$I_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (18)$$

dan masing-masing memenuhi persamaan (16).

(a) Dengan mensubstitusi I_2 pada (13) diperoleh

$$S_2 = \frac{C(\alpha + \mu) - \tilde{\beta}(C - I_2)}{\beta - \tilde{\beta}}. \quad (19)$$

Substitusi persamaan (17) dan (19) pada persamaan (6) dengan $dV/dt = 0$ akan diperoleh

$$V_2 = \frac{C(\psi S_2 + \alpha \gamma I_2)}{\tilde{\beta} I_2 + \mu}. \quad (20)$$

Dengan demikian titik tetapnya adalah $T_2 = (S_2, V_2, I_2)$ dari persamaan (17), (19), dan (20).

(b) Dengan mensubstitusi I_3 pada persamaan (13) diperoleh:

$$S_3 = \frac{C(\alpha + \mu) - \tilde{\beta}(C - I_3)}{\beta - \tilde{\beta}}. \quad (21)$$

Substitusi persamaan (18) dan (21) pada persamaan (6) dengan $dV/dt = 0$ akan diperoleh

$$V_3 = \frac{C(\psi S_3 + \alpha \gamma I_3)}{\tilde{\beta} I_3 + \mu}. \quad (22)$$

Dengan demikian titik tetapnya adalah $T_3 = (S_3, V_3, I_3)$ dari persamaan (21), (22), dan (18).

4 Analisis Kestabilan Titik Tetap

Tinjau kembali sistem persamaan (5) - (7). Dengan melakukan pelinearan pada sistem persamaan tersebut akan diperoleh matriks Jacobi:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{-\beta I}{C} - \psi - \mu & 0 & \frac{-\beta S}{C} + \alpha(1 - \gamma) \\ \psi & \frac{-\tilde{\beta} I}{C} - \mu & \frac{-\tilde{\beta} V}{C} + \alpha \gamma \\ \frac{\beta I}{C} & \frac{\tilde{\beta} I}{C} & \frac{\beta S + \beta V}{C} - \alpha - \mu \end{pmatrix} \quad (23)$$

Kestabilan sistem persamaan (5) - (7) dapat diperoleh dengan menganalisis nilai eigen matriks Jacobi pada ketiga titik tetapnya.

Analisis Kestabilan Titik Tetap dan Bifurkasi Kelompok Inti pada Model Transmisi Penyakit Seksual

1. Kestabilan Sistem di titik tetap T_1

Jika S_1 , V_1 , dan I_1 disubstitusi pada (23) akan diperoleh

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\psi - \mu & 0 & \frac{-\beta\mu}{\mu + \psi} + \alpha(1 - \gamma) \\ \psi & -\mu & \frac{-\beta\psi}{\mu + \psi} + \alpha\gamma \\ 0 & 0 & \frac{\beta\mu + \beta\psi}{\mu + \psi} - \alpha - \mu \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen J_1 diperoleh dari $\det(J_1 - \lambda_1 I) = 0$, yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= -\psi - \mu, \\ \lambda_{12} &= -\mu, \\ \lambda_{13} &= \frac{\beta\mu + \beta\psi}{\mu + \psi} - \alpha - \mu. \end{aligned}$$

Karena $\psi \geq 0$ dan $\mu > 0$, maka $\lambda_{11} < 0$ dan $\lambda_{12} < 0$. Agar $\lambda_{13} < 0$ maka haruslah

$$\frac{\beta\mu + \beta\psi}{\mu + \psi} < \alpha + \mu. \quad (24)$$

Jadi agar T_1 stabil maka haruslah pertidaksamaan (24) dipenuhi.

2. Kestabilan sistem di titik tetap T_2

Jika S_2 , V_2 , dan I_2 disubstitusikan pada (23) maka diperoleh:

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\beta I_2}{C} - \psi - \mu & 0 & \frac{-\beta S_2}{C} + \alpha(1 - \gamma) \\ \psi & \frac{-\beta I_2}{C} - \mu & \frac{-\beta V_2}{C} + \alpha\gamma \\ \frac{\beta I_2}{C} & \frac{\beta I_2}{C} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen J_2 diperoleh dari $\det(J_2 - \lambda_2 I) = 0$, yaitu:

$$p(\lambda_2) = \lambda_2^3 + E_1 \lambda_2^2 + F_1 \lambda_2 + G_1 = 0,$$

dengan

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{I_2}{C} (\beta + \tilde{\beta}) + 2\mu + \psi, \\
 F_1 &= \left(\frac{\beta I_2}{C} + \psi + \mu \right) \left(\frac{\tilde{\beta} I_2}{C} + \mu \right) - \frac{\tilde{\beta} I_2}{C} \left(\frac{-\tilde{\beta} V_2}{C} + \alpha \gamma \right) \\
 &\quad - \frac{\beta I_2}{C} \left(\frac{-\beta S_2}{C} + \alpha (1 - \gamma) \right), \\
 G_1 &= \frac{I_2}{C} \left(\frac{-\beta S_2}{C} + \alpha (1 - \gamma) \right) \left(\tilde{\beta} \psi + \beta \left(\frac{\tilde{\beta} I_2}{C} + \mu \right) \right) \\
 &\quad - \frac{\tilde{\beta} I_2}{C} \left(\frac{\beta I_2}{C} + \mu + \psi \right) \left(\frac{-\tilde{\beta} V_2}{C} + \alpha \gamma \right).
 \end{aligned}$$

Menurut Kriteria Routh-Hurwitz¹ kondisi kestabilan terjadi jika dan hanya jika $E_1 > 0$, $F_1, G_1 > 0$, dan $E_1 F_1 - G_1 > 0$.

(a) Karena $I_2, \beta, \psi > 0$, $\mu \geq 0$, dan $0 \leq \tilde{\beta} \leq \beta$, maka $E_1 > 0$.

(b) Dengan mensubstitusi S_2, V_2 , dan I_2 pada kondisi $G_1 > 0$ akan diperoleh $a_1 b_1 > c_1 d_1$, dengan

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\beta (\tilde{\beta} (C - I_2) - (\alpha + \mu))}{\beta - \tilde{\beta}} + \alpha (1 - \gamma), \\
 b_1 &= \tilde{\beta} \psi + \beta \left(\frac{\tilde{\beta} I_2}{C} + \mu \right), \\
 c_1 &= \beta \left(\frac{\beta I_2}{C} + \psi + \mu \right), \\
 d_1 &= \frac{-\tilde{\beta} \mu (C (\alpha + \mu) + \tilde{\beta} (C - I_2))}{(\tilde{\beta} I_2 + \mu) (\beta - \tilde{\beta})} - \frac{\tilde{\beta} \alpha \gamma I_2}{\tilde{\beta} I_2 + \mu} + \alpha \gamma.
 \end{aligned}$$

(c) Dengan mensubstitusi S_2, V_2 , dan I_2 pada kondisi $E_1 F_1 - G_1 > 0$ akan

¹Lihat Apendiks

diperoleh $e_1 f_1 > g_1 - h_1$, dengan

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{I_2}{C} (\beta + \tilde{\beta} + 2\mu + \psi), \\ f_1 &= \left(\frac{\beta I_2}{C} + \psi + \mu \right) \left(\frac{\beta I_2}{C} + \mu \right) - \frac{\tilde{\beta} I_2}{C} \left(\frac{-\beta V_2}{C} + \alpha \gamma \right) \\ &\quad - \frac{\beta I_2}{C} \left(\frac{-\beta S_2}{C} + \alpha (1 - \gamma) \right), \\ g_1 &= \frac{I_2}{C} \left(\frac{-\beta S_2}{C} + \alpha (1 - \gamma) \right) \left(\tilde{\beta} \psi + \beta \left(\frac{\beta I_2}{C} + \mu \right) \right), \\ h_1 &= \frac{\beta I_2}{C} \left(\frac{\beta I_2}{C} + \psi + \mu \right) \left(\frac{-\beta V_2}{C} + \alpha \gamma \right). \end{aligned}$$

Jadi titik tetap T_2 stabil jika dan hanya jika $a_1 b_1 > c_1 d_1$ dan $e_1 f_1 > g_1 - h_1$.

3. Kestabilan sistem di titik tetap T_3

Dengan mensubstitusikan S_3, V_3 , dan I_3 pada (23) maka diperoleh:

$$J_3 = \begin{pmatrix} \frac{-\beta I_3}{C} - \psi - \mu & 0 & \frac{-\beta S_3}{C} + \alpha (1 - \gamma) \\ \psi & \frac{-\tilde{\beta} I_3}{C} - \mu & \frac{-\tilde{\beta} V_3}{C} + \alpha \gamma \\ \frac{\beta I_3}{C} & \frac{\tilde{\beta} I_3}{C} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dengan cara serupa seperti untuk titik tetap T_2 dapat diperoleh kondisi kestabilan T_3 , yaitu stabil jika dan hanya jika $a_2 b_2 > c_2 d_2$ dan $e_2 f_2 > g_2 - h_2$, dengan $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2, g_2$, dan h_2 seperti pada pembahasan untuk T_2 tetapi dengan mengganti S_2 dengan S_3 , V_2 dengan V_3 , dan I_2 dengan I_3 .

4.1 Orbit dan Kestabilan Sistem

Berikut ini adalah ilustrasi orbit kestabilan model transmisi penyakit seksual pada kelompok inti. Orbit kestabilan diperoleh dengan bantuan *software* Locbif.

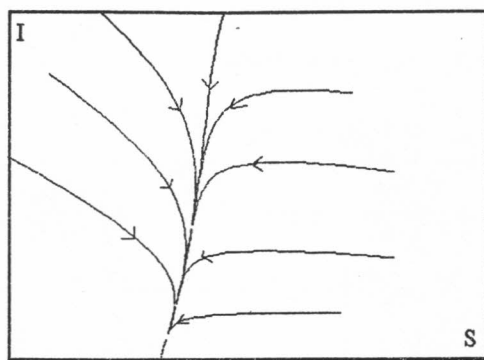
1. Orbit kestabilan titik tetap T_1 untuk kondisi $\frac{\beta\mu + \tilde{\beta}\psi}{\mu + \psi} < \alpha + \mu$.

Dengan menggunakan nilai-nilai parameter sebagai berikut:

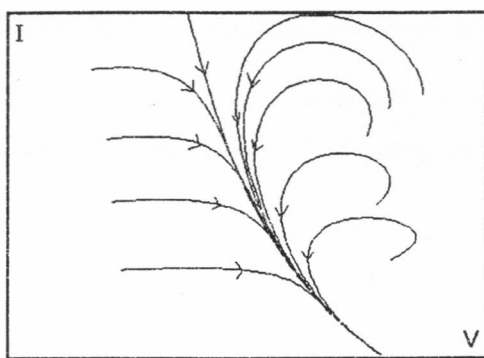
$$\mu = 0.2, \beta = 1, C = 1, \psi = 0.5, \alpha = 0.5, \gamma = 0.025, \tilde{\beta} = 0.5$$

diperoleh nilai $S_1 = 0.286, V_1 = 0.714$, dan $I_1 = 0$

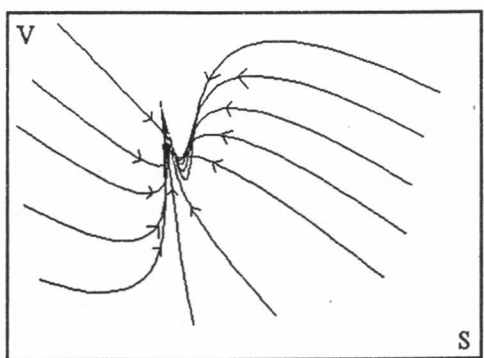
Analisis Kestabilan Titik Tetap dan Bifurkasi Kelompok Inti pada Model Transmisi Penyakit Seksual



Orbit kestabilan T_1 pada bidang SI



Orbit kestabilan T_1 pada bidang VI.



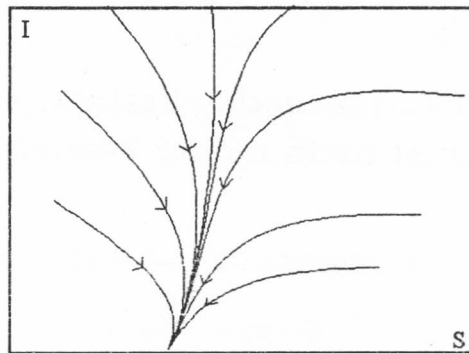
Orbit kestabilan T_1 pada bidang SV.

2. Orbit kestabilan titik tetap T_2 untuk kondisi $a_1 b_1 > c_1 d_1$ dan $e_1 f_1 > g_1 - h_1$.
 Dengan menggunakan nilai-nilai parameter:

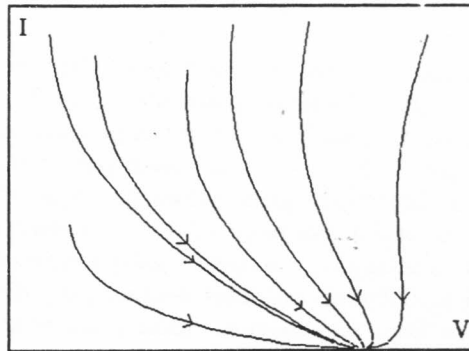
$$\mu = 0.003, \beta = 2, C = 1, \psi = 0.1, \alpha = 0.7, \gamma = 0.004, \tilde{\beta} = 0.5,$$

diperoleh nilai:

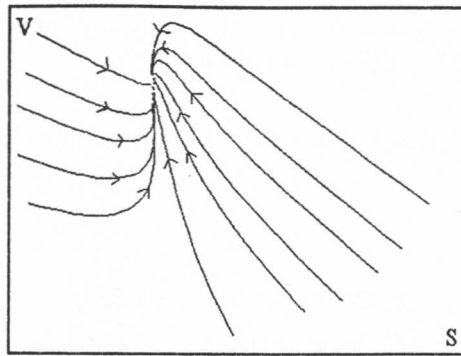
$$\begin{aligned} S_2 &= 0.324, V_2 = 0.12, I_2 = 0.565, \\ a_1 &= 0.049, b_1 = 0.621, c_1 = 2.466, d_1 = -0.055, \\ e_1 &= 1.472, f_1 = 1.357, g_1 = 0.064, h_1 = -0.021. \end{aligned}$$



Orbit kestabilan T_2 pada bidang SI.



Orbit kestabilan T_2 pada bidang VI.

Orbit kestabilan T_2 pada bidang SV

3. Dengan cara serupa seperti untuk titik tetap T_2 dapat diperoleh orbit kestabilan titik tetap T_3 .

5 Pengaruh $R(\psi)$ terhadap kestabilan transmisi penyakit seksual pada model kelompok inti

1. $R(\psi) < 1$

Dengan mensubstitusi persamaan (10) pada $R(\psi) < 1$, diperoleh

$$\frac{\mu}{\mu + \psi} R_0 + \frac{\psi}{\mu + \psi} \tilde{R}_0 < 1 \quad (25)$$

Kemudian substitusi persamaan (8) dan (9) pada (25) sehingga diperoleh:

$$\frac{\mu\beta + \psi\tilde{\beta}}{\mu + \psi} < \alpha + \mu. \quad (26)$$

Pertidaksamaan (26) merupakan syarat kestabilan yang harus dipenuhi agar sistem persamaan (5) - (7) stabil pada titik tetap T_1 (lihat pertidaksamaan (24)). Diketahui bahwa jika $R(\psi) < 1$, maka penyakit akan menghilang. Pada sistem (5) - (7) jika $R(\psi) < 1$, maka sistem pada titik tetap T_1 akan stabil. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa jika $R(\psi) < 1$, maka sistem pada titik tetap T_1 akan stabil dan penyakit akan menghilang. Hal ini menggambarkan bahwa jika setiap satu individu yang terinfeksi pada suatu populasi berpotensi kecil menularkan penyakit seksual yang dideritanya kepada individu yang rentan atau tervaksinasi, maka pada waktu tertentu banyaknya individu yang terinfeksi akan semakin sedikit yang pada akhirnya tidak ada sama sekali. Dengan tidak adanya individu yang terinfeksi, maka pada waktu tertentu penyakit akan menghilang dari populasi tersebut.

2. $R(\psi) = 1$

Analisis Kestabilan Titik Tetap dan Bifurkasi Kelompok Inti pada Model Transmisi Penyakit Seksual

Dengan mensubstitusi persamaan (10) pada persamaan $R(\psi) = 1$, diperoleh:

$$\frac{\mu}{\mu + \psi} R_0 + \frac{\psi}{\mu + \psi} \tilde{R}_0 = 1. \quad (27)$$

Substitusi persamaan (8) dan (9) pada (27) diperoleh:

$$\psi^* = \frac{\beta - \alpha - \mu}{\alpha + \mu - \beta} \mu, \quad (28)$$

dan diasumsikan $\psi^* > 0$.

Karena vaksinasi merupakan perlakuan yang diberikan untuk mengendalikan kestabilan sistem transmisi penyakit seksual pada model kelompok inti, maka untuk perlakuan itu akan dicapai suatu tingkat kritis. Pada pembahasan ini yang dimaksud dengan "tingkat kritis vaksinasi" adalah tingkat kritis transisi langsung individu dari subkelompok rentan ke subkelompok tervaksinasi. Untuk $R(\psi) = 1$, tingkat kritis vaksinasinya adalah ψ^* (persamaan (28)). Diketahui bahwa pada saat $R(\psi) = 1$ penyakit akan menetap (endemis). Ini menggambarkan bahwa setiap satu individu yang terinfeksi pada suatu populasi berpotensi menularkan penyakit seksualnya kepada satu individu yang rentan atau tervaksinasi. Oleh karena itu pada waktu tertentu pertambahan banyaknya individu yang terinfeksi akan sama dengan banyaknya individu yang menginfeksi, dan pada saat tersebut tingkat vaksinasi mencapai tingkat kritis. Dengan pertambahan banyaknya individu yang terinfeksi sama dengan banyaknya individu yang menginfeksi dan tingkat vaksinasi mencapai tingkat kritis vaksinasi, maka penyakit akan menetap.

3. $R(\psi) > 1$

Dengan mensubstitusi persamaan (10) pada persamaan $R(\psi) > 1$, diperoleh:

$$\frac{\mu}{\mu + \psi} R_0 + \frac{\psi}{\mu + \psi} \tilde{R}_0 > 1. \quad (29)$$

Kemudian substitusi persamaan (8) dan (9) pada (29) sehingga diperoleh

$$\frac{\mu\beta + \psi\tilde{\beta}}{\mu + \psi} > \alpha + \mu. \quad (30)$$

Jika kondisi pertidaksamaan (30) diberlakukan pada sistem (5) - (7), maka pada titik tetap T_1 akan diperoleh akar ciri $\lambda_{13} > 0$, sehingga T_1 merupakan titik sadel dan bersifat takstabil. Diketahui bahwa pada saat $R(\psi) > 1$ penyakit akan meningkat menjadi wabah. Hal ini menggambarkan bahwa jika setiap satu individu yang terinfeksi pada suatu populasi berpotensi menularkan penyakit seksualnya kepada lebih dari satu individu yang rentan atau tervaksinasi, maka pada waktu tertentu banyaknya individu yang terinfeksi akan semakin banyak. Dengan semakin banyaknya individu yang terinfeksi pada populasi tersebut dan dengan potensi penularan yang lebih dari satu, maka pada waktu tertentu penularan penyakit akan menjadi tak terkendali (wabah).

Apendiks A

Teorema 1 (*Kondisi Routh-Hurwitz*)

Misalkan E, F, G bilangan real. Maka bagian real dari setiap nilai eigen persamaan karakteristik

$$\lambda^3 + E\lambda^2 + F\lambda + G = 0$$

adalah negatif jika dan hanya jika E, F, G positif dan $EF > G$.

Bukti: (Rindengan, 1999)